Festegessünk!

Szintén rekurzívan…

1. **N emeletes ház 2 vagy 3 szín**
   Könnyű: 2^N vagy 3^N
2. **N emeletes ház 2 vagy 3 szín**
   Két szomszédos emelet nem lehet ugyanolyan színű
   Könnyű: 2 vagy $3 \cdot 2^{N-1}$
3. **N emeletes ház 2 szín, egyik szín nem ismétlődhet, a másik igen.**
   Könnyű: Fibonacci

Fibonacci… -szerűség

$F_1 = 2$ (L, K)

$F_2 = 3$ (LL, LK, KL) megj: 2 x 2 – 1

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ kezdés L vagy KL...

A feladat:

N emelet, 3 szín, kettőből nem lehet két szomszédos, egyből lehet.
(Lila lehet, Narancs és Piros nem!)

– Számítógéppel könnyű!
(Erre találtam ki a feladatot.)

Az első pár „szint” könnyű

1 emelet: 3-féle színű

2 emelet: 3 x 2 + 1 = 7 vagy 3 x 3 – 2 = 7.

3 emelet: 3 x 3 x 3 – 2 – 2 x 2 x 2 = 17.

(LLL, LLP, LLN, LPL, LPN, LNL, LNP, PLL, PLP, PLN, NLL, NLP, NLN, PNL, NPL, PNP, NPN.)

Kijön!

Kéne valami szabály!

Az elv / ötlet: hanyadik emeleten van az első lila.

$M_n = M_{n-1} + 2M_{n-2} + 2M_{n-3} + \dots + 2M_1 + 2(M_0) + 2.$

1. 2. n-1. n. nincs lila

(M_0 triviálisan 1, mert 0 emeletes házat egyféleképp festhetünk ki: nem nyúlunk hozzá.)

Kis python:

```
def m(n):
  l = [1, 3, 7, 17]
  if n < 4:
    return l[n]
  s = m(n - 1)
  i = 2
  while i <= n:
    s += 2 * m(n - i)
    i += 1
  return s + 2

i = 1
while i <= 15:
  print(i, m(i), ((1 + 2 ** 0.5) ** (i + 1) + (1 – 2 ** 0.5) ** (i + 1)) / 2)
  i += 1
```

Eredmény...

1 3 3.0

2 7 6.999999999999999

3 17 16.999999999999996

4 41 40.99999999999986

5 99 98.99999999999997

6 239 238.99999999999991

...

14 275807 275806.9999999998

15 665857 665856.9999999994

Sajna itt a rekurzió sokadfokú :(

HELP! DE!

$M_{n+1}=M_n+2M_{n-1}+2M_{n-2}+ \quad \ldots \quad + 2M_1 + 2M_0 + 2.$

$- \qquad M_n=M_{n-1} +2M_{n-2}+2M_{n-3}+ \ldots + 2M_1 + 2M_0 + 2.$

$M_{n+1} - M_n = M_n + M_{n-1}$

Na ez viszont jó nagy mázli.

Különben az egész maradhatott volna egy szimpla Nemes Tihamér programozási verseny feladat.

Akkor megint számolás jön

$M_{n+1} - M_n = M_n + M_{n-1}$

$M_{n+1} - 2M_n - M_{n-1} = 0.$

Megint mértani sorozatot keresünk:

$p^{n+1} - 2p^n - p^{n-1} = 0$

$p^2 - 2p - 1 = 0$

$$p_{1;2} = 2 \pm \frac{\sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Az 1±√2 mindent összeköt

$$M_n = A\left(1+\sqrt{2}\right)^n + B\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

De mennyi az A és B?
Úgy kell választani őket, hogy a sorozat eleje stimmeljen...

$$M_0 = 1 = A\left(1+\sqrt{2}\right)^0 + B\left(1-\sqrt{2}\right)^0 \rightarrow A + B = 1.$$

$$M_1 = 3 = A\left(1+\sqrt{2}\right) + B\left(1-\sqrt{2}\right).$$

$$M_2 = 7 = A\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + B\left(1-\sqrt{2}\right)^{2.}$$

Kis kézimunka…

$$(i)\ M_1=3=A\left(1+\sqrt{2}\right)+B\left(1-\sqrt{2}\right)$$

$$(ii)\ M_2=7=A\left(1+\sqrt{2}\right)^2+B\left(1-\sqrt{2}\right)^2=A\left(3+2\sqrt{2}\right)+B\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

$$(i)\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right):$$

$$3\left(3+2\sqrt{2}\right)=A\left(1+\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)+B\left(1-\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

$$(ii)\cdot\left(1+\sqrt{2}\right):$$

$$7\left(1+\sqrt{2}\right)=A\left(1+\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)+B\left(1+\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

$$2-\sqrt{2}=B\left(-2\sqrt{2}\right)$$

$$B=\frac{2-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{-2}=\frac{1-\sqrt{2}}{2.}$$

$$A=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Azaz...

$$M_n=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\frac{1-\sqrt{2}}{2}\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

$$M_n=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2}+\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2}$$

$$\ldots$$

$$\textit{Megjegyzés}:$$

$$M_0=\frac{1+\sqrt{2}}{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}=1.$$

$$M_1=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{2}=\frac{3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$M_2=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^3}{2}+\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^3}{2}=\frac{7+5\sqrt{2}+7-5\sqrt{2}}{2}=\frac{14}{2}=7.$$

$$M_3=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^4}{2}+\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^4}{2}=\frac{17+12\sqrt{2}+17-12\sqrt{2}}{2}=17.$$

Remélem, tetszett... :-)

Köszönöm a figyelmet!