Jenga...

- ...van egypupú (akarom mondani: játékboltban kapható)
  - Némelyik hasáb eleve kisebb
  - Némelyik jobban lekopott
  - Némelyiket összefogdosták kicsit, tapad
- ...és van kétpupú (akarom mondani: ideális jenga), ez érdekesebb, ezzel foglalkozunk
  - Pontosan egyforma hasábok
  - Jól csúsznak

Lehetséges feladatok

- 1. Biztos, hogy ledől a torony?
  Akkor is, ha nagyon ügyesen játszunk?
  - Túl könnyű!!!
    - Az első lépés után már 19 emeletes a torony
    - Aztán 3 lépésenként egy emelettel magasabb lesz
    - A 109. lépésben 55 elemeltes, ez marhaság!
- 2. Hogyan kell „jól” jengázni? Mi a nyerő stratégia? Mi történik, ha senki se hibázik?
  - Túl nehéznek tűnik!!!
    - Tudjuk, hogy van ilyen, lehet ,,hibátlanul” játszani
    - De nem tudjuk, hogyan (Lehet, hogy van rá szép megoldás??)

Mai témánk:

- Hányféle torony építhető?
  - Nem túl nehéz
  - De azért elég érdekes
- Mekkmester módszer :-) Na jó, alulról fölfelé is lehet...
- Legyen J_n az n darab hasábból „felépíthető” tornyok száma

Mi van az elején?

Számoljuk csak végig!

- J_0 =1
- J_1 =3
- J_2 =6
- J_3 =16 = 1 + 3x3 + 3 + 3!
- J_4 =37 (aki nem hiszi, járjon utána!)

Hányféle kezdés lehetséges?

- Az első emeleten egy hasáb van:
  - (nyilván csak középen lehet)
- Az első emeleten két hasáb van, vigyázat, ez három lehetőség:
  - Kétoldalt
  - Középen és baloldalt
  - Középen és jobboldalt
- Az első emeleten három hasáb van:
  - (nyilván csak egyféleképpen tehetem őket)

Hányféle folytatás lehetséges?

- Ha az első szinten 1 hasáb van?
  - Marad n-1 hasáb, J_{n-1} -féle torony lehet a folytatás

- Ha az első szinten 2 hasáb van?
  - Marad n-2 hasáb, J_{n-2} -féle torony lehet a folytatás

- Ha az első szinten 3 hasáb van?
  - Marad n-3 hasáb, J_{n-2} -féle torony lehet a folytatás

Szóval...

- Az n darab hasábból építhető tornyok száma

  J_n =...

- Az egyes (szimpla) szinttel kezdődő

  J_{n-1}
- Plusz a kettes (dupla) szinttel kezdődő

  $3 \cdot J_{n-2}$
- Plusz a hármas (tripla) szinttel kezdődő

  J_{n-3}

Azaz a bűvös szabály...

- $J_n = J_{n-1} + 3 \cdot J_{n-2} + J_{n-3}$

Mi van az elején?

Számoljuk csak végig!

- $J_0 = 1$
- $J_1 = 3$
- $J_2 = 6$
- $J_3 = 16$
- $J_4 = 37$ (aki nem hiszi, járjon utána!)

- Megj: $16=6+3\cdot 3+1$! $37=16+3\cdot 6+3$!

Most jön a „bc”...

A program:

```
for (n=1; n<55; n++) {
  if (n==1) { v[1]=3 } else {
    if (n==2) { v[2]=6 } else {
      if (n==3) { v[3]=16 } else {
        v[n]=v[n-1]+3*v[n-2]+v[n-3] } } } }

for (n=1; n<55; n++) { print n, " ", v[n], "\n"; }
```

Most jön a „bc”...

És az eredmény:

...
48 2606311052073645841
49 6292191489679085763
50 15190694031431817366
51 36673579552542720496
52 88537853136517258357
53 213749285825577237211
54 516036424787671732778

Na de most egy kis matekot!

- Figyeljünk először a szabályra! Találunk-e olyan viszonylag egyszerű sorozatot, amelyre teljesül?
- Lehet, hogy van ilyen mértani sorozat?
- $m_n = A \cdot x^n$, ha erre teljesül a rekurzió, akkor
- $Ax^n = Ax^{n-1} + 3Ax^{n-2} + Ax^{n-3}$
  osztva Ax^{n-3} -mal
- $x^3 = x^2 + 3x + 1$, $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$
  Puff, harmadfokú az egyenlet! HELP! HELP!

Szponzorunk: -1

- $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$
  hiszen ennek megoldása a -1!
  (-1)-(+1)-3(-1)-1=-1-1+3-1=0
  Azaz az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható, az egyenlet így néz ki:
- $(x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
  Tovább bontva...

Nos, akkor tovább...

$$x^3 - x^2 - 3\mathrm{x} - 1 = 0$$

$$(x+1)(x^2 - 2\mathrm{x} - 1) = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_{2;3} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2}$$

$$x_{2;3} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{2}\,;\, x_3 = 1 - \sqrt{2}$$

Így aztán van egy csomó „jó” mértani sorozatunk

$$P_n = A \cdot (-1)^n$$

$$Q_n = B \cdot (1+\sqrt{2})^n$$

$$R_n = C \cdot (1-\sqrt{2})^n$$

A három mértani sorozat: ha külön-külön jók, az összegük is jó lesz!

$$J_n = A(-1)^n + B(1+\sqrt{2})^n + C(1-\sqrt{2})^n$$

$$J_{n-1} = A(-1)^{n-1} + B(1+\sqrt{2})^{n-1} + C(1-\sqrt{2})^{n-1}$$

$$3J_{n-2} = 3A(-1)^{n-2} + 3B(1+\sqrt{2})^{n-2} + 3C(1-\sqrt{2})^{n-2}$$

$$J_{n-3} = A(-1)^{n-3} + B(1+\sqrt{2})^{n-3} + C(1-\sqrt{2})^{n-3}$$

A három mértani sorozat: ha külön-külön jók, az összegük is jó lesz!

$$J_n = A(-1)^n + B(1+\sqrt{2})^n + C(1-\sqrt{2})^n$$

$$J_{n-1} = A(-1)^{n-1} + B(1+\sqrt{2})^{n-1} + C(1-\sqrt{2})^{n-1}$$

$$3J_{n-2} = 3(A(-1)^{n-2} + B(1+\sqrt{2})^{n-2} + C(1-\sqrt{2})^{n-2})$$

$$J_{n-3} = A(-1)^{n-3} + B(1+\sqrt{2})^{n-3} + C(1-\sqrt{2})^{n-3}$$

Azaz az összes ilyen sorozatra teljesül a „szabály”:

$$J_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot (1+\sqrt{2})^n + C \cdot (1-\sqrt{2})^n$$

Mennyi legyen az A,B,C?

$$(J_0 = \ )\ \ 1 = A(-1)^0 + B(1+\sqrt{2})^0 + C(1-\sqrt{2})^0 = A + B + C \quad (1)$$

$$(J_1 = \ )\ \ 3 = A(-1)^1 + B(1+\sqrt{2})^1 + C(1-\sqrt{2})^1 = -A + (1+\sqrt{2})B + (1-\sqrt{2})C\,(2)$$

$$(J_2 = \ )\ \ 6 = A(-1)^2 + B(1+\sqrt{2})^2 + C(1-\sqrt{2})^2 = A + (3+2\sqrt{2})B + (3-2\sqrt{2})C\,(3)$$

$$(1)\ \ A = 1 - B - C \rightarrow$$

$$(2)\ \ 3 = -1 + B + C + B(1+\sqrt{2}) + C(1-\sqrt{2}) \rightarrow 4 = B(2+\sqrt{2}) + C(2-\sqrt{2}) \quad (ii)$$

$$(3)\ \ 6 = 1 - B - C + B(3+2\sqrt{2}) + C(3-2\sqrt{2}) \rightarrow 5 = B(2+2\sqrt{2}) + C(2-2\sqrt{2}) \quad (iii)$$

$$(ii)\ \ 4\sqrt{2} = B(2\sqrt{2}+2) + C(2\sqrt{2}-2)$$

$$(iii)\ \ 5 = B(2\sqrt{2}+2) - C(2\sqrt{2}-2)$$

A „jó” együtthatók kiszámítása

$$(ii)\quad 4\sqrt{2}=B(2\sqrt{2}+2)+C(2\sqrt{2}-2)$$

$$(iii)\quad 5=B(2\sqrt{2}+2)-C(2\sqrt{2}-2)$$

$$(iii)+(ii)\quad 5+4\sqrt{2}=2B(2\sqrt{2}+2)$$

$$B=\frac{5+4\sqrt{2}}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{2}+1)}=\frac{(5+4\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{4}=\frac{3+\sqrt{2}}{4}$$

$$(iii)-(ii)\quad 5-4\sqrt{2}=-2C(2\sqrt{2}-2)$$

$$C=\frac{5-4\sqrt{2}}{-2\cdot 2\cdot(\sqrt{2}-1)}=\frac{(5-4\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{4}=\frac{3-\sqrt{2}}{4}$$

$$A=1-B-C=1-\frac{3-\sqrt{2}}{4}-\frac{3+\sqrt{2}}{4}=\frac{4-3+\sqrt{2}-3-\sqrt{2}}{4}=\frac{-1}{2}$$

Azaz a J_n sorozat...

$$J_n = -\frac{1}{2}\cdot(-1)^n + \frac{3+\sqrt{2}}{4}\cdot(1+\sqrt{2})^n + \frac{3-\sqrt{2}}{4}\cdot(1-\sqrt{2})^n$$

Ellenőrzésképpen...

$$J_0 = -\frac{1}{2} + \frac{3+\sqrt{2}}{4} + \frac{3-\sqrt{2}}{4} = \frac{-2+3+3}{4} = 1$$

$$J_1 = -\frac{1}{2}\cdot(-1) + \frac{3+\sqrt{2}}{4}\cdot(1+\sqrt{2}) + \frac{3-\sqrt{2}}{4}\cdot(1-\sqrt{2}) = 3$$

$$J_2 = -\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{3+\sqrt{2}}{4}\cdot(3+2\sqrt{2}) + \frac{3-\sqrt{2}}{4}\cdot(3-2\sqrt{2}) = 6$$

Így aztán a tornyok száma...

$$J_{54} = -\frac{1}{2}\cdot(-1)^{54} + \frac{3+\sqrt{2}}{4}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)^{54} + \frac{3-\sqrt{2}}{4}\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)^{54} =$$

$$= 516\ 036\ 424\ 787\ 671\ 732\ 778.$$

De még nincs vége :-)

Megint bc:

```
scale=100
define j(n)
{
  return(-1/2*(-1)^n + (3+sqrt(2))/4*(1+sqrt(2))^n + (3-sqrt(2))/4*(1-sqrt(2))^n);
}

j(54);
```

Száz tizedesjegy pontossággal a képlettel számolva...

516 036 424 787 671 732 777,
9999999999999999999999999999999999999999999\
9999999999999999999999999999999999955668978\
38385971933753

Majdnem... :-)