

Jenga...

- ...van egypupú (akarom mondani: játékboltban kapható)
 - Némelyik hasáb eleve kisebb
 - Némelyik jobban lekopott
 - Némelyiket összefogdosták kicsit, tapad
- ...és van kétpupú (akarom mondani: ideális jenga), ez érdekesebb, ezzel foglalkozunk
 - Pontosan egyforma hasábok
 - Jól csúsznak

Lehetséges feladatok

- 1. Biztos, hogy ledől a torony?
Akkor is, ha nagyon ügyesen játszunk?
 - Túl könnyű!!!
 - Az első lépés után már 19 emeletes a torony
 - Aztán 3 lépésenként egy emelettel magasabb lesz
 - A 109. lépésben 55 emeletes, ez képtelenség!
- 2. Hogyan kell „jól” jengázni? Mi a nyerő stratégia? Mi történik, ha senki se hibázik?
 - Túl nehéznek tűnik!!!
 - Tudjuk, hogy van ilyen, lehet „hibátlanul” játszani
 - De nem tudjuk, hogyan (Lehet, hogy van rá szép megoldás??)

Mai témánk:

- Hányféle torony építhető?
 - Nem túl nehéz
 - De azért elég érdekes
- Mekkmester módszer :-) Na jó, alulról fölfelé is lehet...
- Legyen J_n az n darab hasábból „felépíthető” tornyok száma

Mi van az elején?

Számoljuk csak végig!

- $J_0 = 1$
- $J_1 = 3$
- $J_2 = 6$
- $J_3 = 16 = 1 + 3 \times 3 + 3 + 3.$
- $J_4 = 37$ (aki nem hiszi, járjon utána!)

Hányféle kezdés lehetséges?

- Az első emeleten egy hasáb van:
 - (nyilván csak középen lehet)
- Az első emeleten két hasáb van, vigyázat, ez három lehetőség:
 - Kétoldalt
 - Középen és baloldalt
 - Középen és jobboldalt
- Az első emeleten három hasáb van:
 - (nyilván csak egyféleképpen tehetem őket)

Hányféle folytatás lehetséges?

- Ha az első szinten 1 hasáb van?
 - Marad $n-1$ hasáb, J_{n-1} -féle torony lehet a folytatás
- Ha az első szinten 2 hasáb van?
 - Marad $n-2$ hasáb, J_{n-2} -féle torony lehet a folytatás
- Ha az első szinten 3 hasáb van?
 - Marad $n-3$ hasáb, J_{n-3} -féle torony lehet a folytatás

Szóval...

- Az n darab hasázból építhető tornyok száma

$$J_n = \dots$$

- Az egyes (szimpla) szinttel kezdődő

$$J_{n-1}$$

- Plusz a kettes (dupla) szinttel kezdődő

$$3 \cdot J_{n-2}$$

- Plusz a hármas (tripla) szinttel kezdődő

$$J_{n-3}$$

Azaz a bűvös szabály...

- $J_n = J_{n-1} + 3 \cdot J_{n-2} + J_{n-3}$

Mi van az elején?

Számoljuk csak végig!

- $J_0 = 1$
- $J_1 = 3$
- $J_2 = 6$
- $J_3 = 16$
- $J_4 = 37$ (aki nem hiszi, járjon utána!)
- Megj: $16 = 6 + 3 \cdot 3 + 1!$ $37 = 16 + 3 \cdot 6 + 3!$

Most jön a „bc”...

A program:

```
for (n=1; n<55; n++) {  
    if (n==1) { v[1]=3 } else {  
        if (n==2) { v[2]=6 } else {  
            if (n==3) { v[3]=16 } else {  
                v[n]=v[n-1]+3*v[n-2]+v[n-3] } } } }  
  
for (n=1; n<55; n++) { print n, " ", v[n], "\n"; }
```

Most jön a „bc”...

És az eredmény:

...

```
48 2606311052073645841
49 6292191489679085763
50 15190694031431817366
51 36673579552542720496
52 88537853136517258357
53 213749285825577237211
54 516036424787671732778
```

Na de most egy kis matekot!

- Figyeljünk először a szabályra! Találunk-e olyan viszonylag egyszerű sorozatot, amelyre teljesül?
- Lehet, hogy van ilyen mértani sorozat?
- $m_n = A \cdot x^n$, ha erre teljesül a rekurzió, akkor
- $Ax^n = Ax^{n-1} + 3Ax^{n-2} + Ax^{n-3}$
osztva Ax^{n-3} -mal
- $x^3 = x^2 + 3x + 1$, $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$
Puff, harmadfokú az egyenlet! **HELP! HELP!**

Szponzorunk: -1

- $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$

hiszen ennek megoldása a -1!

$$(-1) - (+1) - 3(-1) - 1 = -1 - 1 + 3 - 1 = 0$$

Azaz az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható, az egyenlet így néz ki:

- $(x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$

Tovább bontva...

Nos, akkor tovább...

$$x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$(x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_{2;3} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2}$$

$$x_{2;3} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{2}; x_3 = 1 - \sqrt{2}$$

Így aztán van egy csomó „jó”
mértani sorozatunk

$$P_n = A \cdot (-1)^n$$

$$Q_n = B \cdot (1 + \sqrt{2})^n$$

$$R_n = C \cdot (1 - \sqrt{2})^n$$

**A három mértani sorozat: ha
külön-külön jók, az összegük is
jó lesz!**

$$J_n = A(-1)^n + B(1 + \sqrt{2})^n + C(1 - \sqrt{2})^n$$

$$J_{n-1} = A(-1)^{n-1} + B(1 + \sqrt{2})^{n-1} + C(1 - \sqrt{2})^{n-1}$$

$$3 J_{n-2} = 3A(-1)^{n-2} + 3B(1 + \sqrt{2})^{n-2} + 3C(1 - \sqrt{2})^{n-2}$$

$$J_{n-3} = A(-1)^{n-3} + B(1 + \sqrt{2})^{n-3} + C(1 - \sqrt{2})^{n-3}$$

**A három mértani sorozat: ha
külön-külön jók, az összegük is
jó lesz!**

$$J_n = A(-1)^n + B(1 + \sqrt{2})^n + C(1 - \sqrt{2})^n$$

$$J_{n-1} = A(-1)^{n-1} + B(1 + \sqrt{2})^{n-1} + C(1 - \sqrt{2})^{n-1}$$

$$3 J_{n-2} = 3(A(-1)^{n-2} + B(1 + \sqrt{2})^{n-2} + C(1 - \sqrt{2})^{n-2})$$

$$J_{n-3} = A(-1)^{n-3} + B(1 + \sqrt{2})^{n-3} + C(1 - \sqrt{2})^{n-3}$$

**Azaz az összes ilyen sorozatra
teljesül a „szabály”:**

$$J_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot (1 + \sqrt{2})^n + C \cdot (1 - \sqrt{2})^n$$

Mennyi legyen az A,B,C?

$$(J_0 =) \quad 1 = A(-1)^0 + B(1 + \sqrt{2})^0 + C(1 - \sqrt{2})^0 = A + B + C \quad (1)$$

$$(J_1 =) \quad 3 = A(-1)^1 + B(1 + \sqrt{2})^1 + C(1 - \sqrt{2})^1 = -A + (1 + \sqrt{2})B + (1 - \sqrt{2})C \quad (2)$$

$$(J_2 =) \quad 6 = A(-1)^2 + B(1 + \sqrt{2})^2 + C(1 - \sqrt{2})^2 = A + (3 + 2\sqrt{2})B + (3 - 2\sqrt{2})C \quad (3)$$

$$(1) \quad A = 1 - B - C \rightarrow$$

$$(2) \quad 3 = -1 + B + C + B(1 + \sqrt{2}) + C(1 - \sqrt{2}) \rightarrow 4 = B(2 + \sqrt{2}) + C(2 - \sqrt{2}) \quad (ii)$$

$$(3) \quad 6 = 1 - B - C + B(3 + 2\sqrt{2}) + C(3 - 2\sqrt{2}) \rightarrow 5 = B(2 + 2\sqrt{2}) + C(2 - 2\sqrt{2}) \quad (iii)$$

$$(ii) \quad 4\sqrt{2} = B(2\sqrt{2} + 2) + C(2\sqrt{2} - 2)$$

$$(iii) \quad 5 = B(2\sqrt{2} + 2) - C(2\sqrt{2} - 2)$$

A „jó” együtthatók kiszámítása

$$(ii) \quad 4\sqrt{2} = B(2\sqrt{2} + 2) + C(2\sqrt{2} - 2)$$

$$(iii) \quad 5 = B(2\sqrt{2} + 2) - C(2\sqrt{2} - 2)$$

$$(iii) + (ii) \quad 5 + 4\sqrt{2} = 2B(2\sqrt{2} + 2)$$

$$B = \frac{5 + 4\sqrt{2}}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2} + 1)} = \frac{(5 + 4\sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}{4} = \frac{3 + \sqrt{2}}{4}$$

$$(iii) - (ii) \quad 5 - 4\sqrt{2} = -2C(2\sqrt{2} - 2)$$

$$C = \frac{5 - 4\sqrt{2}}{-2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)} = \frac{(5 - 4\sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)}{4} = \frac{3 - \sqrt{2}}{4}$$

$$A = 1 - B - C = 1 - \frac{3 + \sqrt{2}}{4} - \frac{3 - \sqrt{2}}{4} = \frac{4 - 3 + \sqrt{2} - 3 - \sqrt{2}}{4} = \frac{-1}{2}$$

Azaz a J_n sorozat...

$$J_n = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n + \frac{3 + \sqrt{2}}{4} \cdot (1 + \sqrt{2})^n + \frac{3 - \sqrt{2}}{4} \cdot (1 - \sqrt{2})^n$$

Ellenőrzésképpen...

$$J_0 = -\frac{1}{2} + \frac{3 + \sqrt{2}}{4} + \frac{3 - \sqrt{2}}{4} = \frac{-2 + 3 + 3}{4} = 1$$

$$J_1 = -\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{3 + \sqrt{2}}{4} \cdot (1 + \sqrt{2}) + \frac{3 - \sqrt{2}}{4} \cdot (1 - \sqrt{2}) = 3$$

$$J_2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3 + \sqrt{2}}{4} \cdot (3 + 2\sqrt{2}) + \frac{3 - \sqrt{2}}{4} \cdot (3 - 2\sqrt{2}) = 6$$

Így aztán a tornyok száma...

$$\begin{aligned} J_{54} &= -\frac{1}{2} \cdot (-1)^{54} + \frac{3 + \sqrt{2}}{4} \cdot (1 + \sqrt{2})^{54} + \frac{3 - \sqrt{2}}{4} \cdot (1 - \sqrt{2})^{54} = \\ &= 516\ 036\ 424\ 787\ 671\ 732\ 778. \end{aligned}$$

De még nincs vége :-)

Megint bc:

```
scale=100
```

```
define j(n)
```

```
{
```

```
    return(-1/2*(-1)^n + (3+sqrt(2))/4*(1+sqrt(2))^n +  
    (3-sqrt(2))/4*(1-sqrt(2))^n);
```

```
}
```

```
j(54);
```

